1 Puissances d'un nombre relatif : exposant entier positif

a Définition

a désigne un nombre relatif et n un entier positif non nul.
a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

a^n est une **puissance** du nombre a et se lit « a exposant n ».
Le nombre n s'appelle un exposant.

EXEMPLES :

- 2^5 est le produit de 5 facteurs égaux à 2. Donc : $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.
- $(-5)^3$ est le produit de 3 facteurs égaux à -5. Donc : $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$.
- $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ est le produit de 4 facteurs égaux à $\frac{2}{3}$. Donc : $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$.

Cas particuliers :

- $n = 1$: $a^1 = a$.
- $n = 2$: a^2 se lit aussi « a au **carré** ».
- $n = 3$: a^3 se lit aussi « a au **cube** ».

EXEMPLES :

$17^1 = 17$.
« 3 au **carré** » : $3^2 = 3 \times 3 = 9$.
« (-4) au **cube** » : $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$.

Remarque : Il est utile de connaître les carrés des premiers nombres entiers.

$1^2 = 1$;	$4^2 = 16$;	$7^2 = 49$;	$10^2 = 100$;	$13^2 = 169$;
$2^2 = 4$;	$5^2 = 25$;	$8^2 = 64$;	$11^2 = 121$;	$14^2 = 196$;
$3^2 = 9$;	$6^2 = 36$;	$9^2 = 81$;	$12^2 = 144$;	$15^2 = 225$.

Convention :

Pour $a \neq 0$, on convient que $a^0 = 1$.

EXEMPLE :

$(-12)^0 = 1$.

b Puissances de 10

Propriété :

n désigne un entier positif.

$$10^n = \underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}.$$

EXEMPLES :

- $10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{3 \text{ facteurs}} = 1\underbrace{000}_{3 \text{ zéros}}$.
- $10^{10} = 1\underbrace{0\,000\,000\,000}_{10 \text{ zéros}}$.

Remarques : • Un million se note 10^6. • Un milliard se note 10^9.

- Il ne faut pas confondre $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ et $5 \times 3 = 15$; donc $5^3 \neq 5 \times 3$.
- Attention au rôle des parenthèses !

$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$ et $-4^2 = -(4 \times 4) = -16$; donc $(-4)^2 \neq -4^2$.

2 Puissances d'un nombre relatif : exposant entier négatif

a Définition

a désigne un nombre relatif non nul.
n désigne un entier non nul.
a^{-n} désigne l'inverse de a^n.
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

EXEMPLES :

- 3^{-2} est l'inverse de 3^2.

Donc : $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{3 \times 3} = \dfrac{1}{9}$.

- $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2)} = -\dfrac{1}{8}$.

Cas particuliers :
Pour $a \neq 0$, a^{-1} est l'inverse de a ; donc $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

EXEMPLE :

3^{-1} est l'inverse de 3 ; donc $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

b Puissances de 10

Propriété :
n désigne un entier positif non nul.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10......0}_{n \text{ zéros}}} = \underbrace{0,0......01}_{n \text{ chiffres après la virgule}}.$$

EXEMPLES :

- $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{1\underbrace{00}_{2 \text{ zéros}}} = 0,\underbrace{01}_{2 \text{ chiffres après la virgule}}$.
- $10^{-5} = 0,\underbrace{000\,01}_{5 \text{ chiffres après la virgule}}$.

3 Écriture scientifique d'un nombre décimal

Propriété : Un nombre décimal admet plusieurs écritures de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a désigne un nombre décimal et n un entier relatif.

EXEMPLES :

- $2\,540\,000 = 254 \times 10^4 = 25,4 \times 10^5 = 2,54 \times 10^6 = 0,254 \times 10^7$.
- $0,001\,38 = 138 \times 10^{-5} = 13,8 \times 10^{-4} = 1,38 \times 10^{-3} = 0,138 \times 10^{-2}$.

Définition : L'**écriture scientifique** (ou notation scientifique) d'un nombre décimal est l'unique forme $a \times 10^n$ dans laquelle le nombre a possède **un seul chiffre non nul avant la virgule**.

EXEMPLES :

- L'écriture scientifique de $2\,540\,000$ est $2,54 \times 10^6$.
- L'écriture scientifique de $0,001\,38$ est $1,38 \times 10^{-3}$.
- L'écriture scientifique de $-14\,000\,000\,000$ est $-1,4 \times 10^{10}$.

4 Calculer avec des puissances

a Exemples de calcul

Calcul littéral	Exemple numérique
a désigne un nombre relatif. $a^2 \times a^3 = \underbrace{\underbrace{a \times a}_{2\text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times a \times a}_{3\text{ facteurs}}}_{5\text{ facteurs égaux à } a} = a^5$	$5^2 \times 5^3 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$
a désigne un nombre relatif non nul. $\dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{\cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$	$\dfrac{(-2)^2}{(-2)^5} = \dfrac{\cancel{(-2)} \times \cancel{(-2)}}{\cancel{(-2)} \times \cancel{(-2)} \times (-2) \times (-2) \times (-2)} = \dfrac{1}{(-2)^3} = (-2)^{-3}$
a et b représentent deux nombres relatifs. $(ab)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2b^2$	$(3x)^2 = 3x \times 3x = 3 \times 3 \times x \times x = 9x^2$

b Règle de priorité

Pour calculer une expression sans parenthèses, on calcule d'abord les puissances.

EXEMPLES :

- $E = 7 - 5 \times 4^2$
  $E = 7 - 5 \times 16$
  $E = 7 - 80$
  $E = -73.$
- $F = 2 \times [7 : 10^2 - (-2)^3]$
  $F = 2 \times [7 : 100 - (-8)]$
  $F = 2 \times [0{,}07 + 8]$
  $F = 2 \times 8{,}07$
  $F = 16{,}14.$

c Règles de calcul

n et p désignent deux nombres entiers relatifs.

$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$; $\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$; $(10^n)^p = 10^{n \times p}$.

EXEMPLES

- $10^4 \times 10^2 = 10^{4+2} = 10^6$;
- $\dfrac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$;
- $(10^4)^3 = 10^{4 \times 3} = 10^{12}$;
- $10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3$;
- $\dfrac{10^{-1}}{10^3} = 10^{-1-3} = 10^{-4}$;
- $(10^2)^{-4} = 10^{2 \times (-4)} = 10^{-8}$.

$10^2 + 10^3 = 100 + 1\,000 = 1\,100.$

$10^2 + 10^3$ n'est pas une puissance de 10.