# Énoncés

## Exercice A

**1)** a) Construire un triangle EFG tel que $EF = 5\,cm$, $F\hat{E}G = 34°$ et $E\hat{F}G = 56°$.

b) Démontrer que le cercle de diamètre $[EF]$ passe par le point G.

**2)** a) Placer un point H sur ce cercle tel que $FH = 2\,cm$

b) Démontrer que EFH est un triangle rectangle.

## Exercice B

On considère un quadrilatère ABCD tel que $A\hat{B}C$ et $A\hat{D}C$ sont des angles droits (ABCD n'est pas forcément un rectangle).

Démontrer qu'il existe un cercle circonscrit au quadrilatère ABCD .

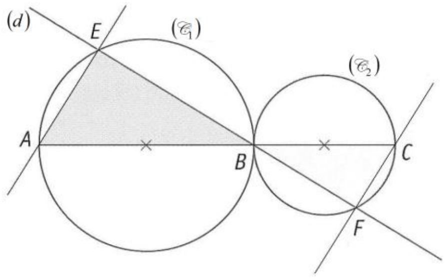
## Exercice C

**1)** Construire un triangle MNP équilatéral.
Le point R est le symétrique du point N par rapport au point P.

**2)** Démontrer que MNR est un triangle rectangle.

## Exercice D

On considère un segment $[AC]$, un point B de ce segment (distinct de A et C), le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de diamètre $[AB]$ et le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de diamètre $[BC]$.
On considère une droite $(d)$ passant par le point B et non perpendiculaire à la droite $(AC)$. Cette droite coupe le cercle $(\mathcal{C}_1)$ en E et le cercle $(\mathcal{C}_2)$ en F.




Montrer que les droites $(AE)$ et $(FC)$ sont parallèles.

## Exercice E

ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AC = 10\,cm$ et $AB = 6\,cm$.
On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$ et $[BI]$.

**1)** Calculer BI.

**2)** Calculer IJ.

**3)** a) Montrer que les droites $(IJ)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires

b) Calculer JK.

## Exercice F

**1)** Construire un segment $[EF]$ de 4 cm, puis le cercle de diamètre $[EF]$.

G est un point de ce cercle tel que $EG = 3\,cm$.

Quelle est la nature du triangle EFG ? Justifier la réponse.

**2)** a) Construire le point K, symétrique du point E par rapport au point G.

b) Construire le point L, symétrique du point F par rapport au point G.

**3)** Quelle est la nature du quadrilatère EFKL ? Justifier la réponse.

## Exercice G

On considère un triangle MNP rectangle en P et le point I milieu du segment $[MN]$.

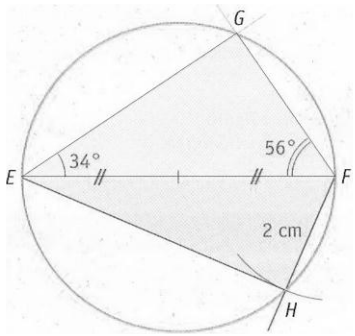
Le cercle de diamètre $[IN]$ coupe le segment $[PN]$ en J.

Démontrer que le point J est le milieu du segment $[PN]$.

# Corrigés

## Exercice A

**1)** a)




b) . Montrons que EFG est un triangle rectangle en G.
Dans le triangle EFG,
$\widehat{FEG} = 34°$ et $\widehat{EFG} = 56°$.

. Or : ***dans tout triangle, la somme des mesures en degrés des trois angles est égale à 180.***

$\widehat{EGF} + \widehat{FEG} + \widehat{EFG} = 180°$

$\widehat{EGF} = 180 - \left(\widehat{FEG} + \widehat{EFG}\right)$

$\widehat{EGF} = 180 - (34 + 56)$

$\widehat{EGF} = 90°$

Donc EFG est un triangle rectangle en G.

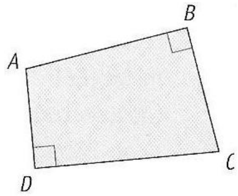
. EFG est un triangle rectangle en G ;
Donc d'après le théorème de la médiane (***si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit à ce triangle***) :
$[EF]$ est un diamètre de son cercle circonscrit.

Par conséquent, le cercle de diamètre $[EF]$ passe bien par le point G.

**2)** a) Voir figure.

b) Le point H appartient au cercle de diamètre $[EF]$.
Donc d'après la réciproque du théorème de la médiane (***si trois points appartiennent à un cercle tels que deux d'entre eux sont les extrémités d'un diamètre de ce cercle, alors ces trois points forment un triangle rectangle***) :
EFH est un triangle rectangle

## Exercice B



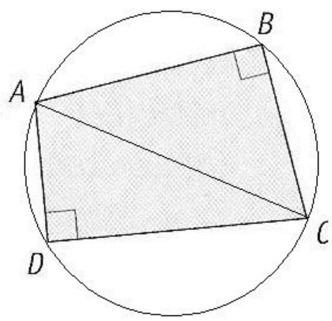

. ABC est un triangle rectangle en B.
Donc d'après le théorème de la médiane (***si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit à ce triangle***) :
l'hypoténuse $[AC]$ du triangle ABC est un diamètre de son cercle circonscrit.

Par conséquent, le cercle de diamètre $[AC]$ passe par le point B.

. ADC est un triangle rectangle en D.
Donc d'après le théorème de la médiane (***si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit à ce triangle***) :
l'hypoténuse $[AC]$ du triangle ADC est un diamètre de son cercle circonscrit.

Par conséquent, le cercle de diamètre $[AC]$ passe par le point D.

On en déduit que le cercle de diamètre $[AC]$ passe par les point B et D.

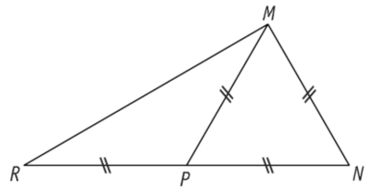



Il existe donc un cercle passant par les points A, B, C et D.
Autrement dit :

| |
|---|
| il existe un cercle circonscrit au quadrilatère ABCD : le cercle de diamètre $[AC]$. |

## Exercice C

**1)** Figure :




**2)** Le triangle MNP est équilatéral,
donc $MP = PN$.

De plus, le point R est le symétrique du point N par rapport au point P, donc le point P est le milieu du segment $[RN]$.
Donc $PR = PN$,
d'où $PN = \dfrac{RN}{2}$.

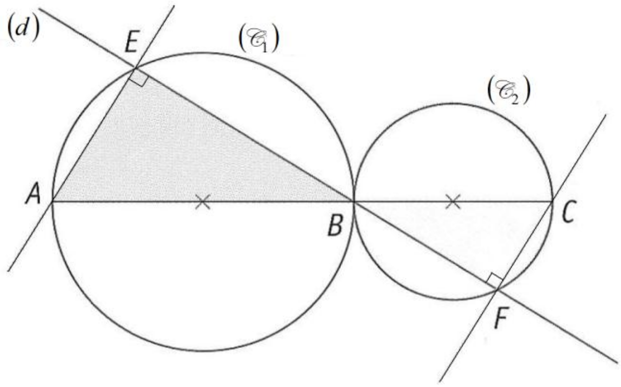
On en déduit que :
$MP = \dfrac{RN}{2}$.

Par conséquent, dans le triangle MNR, la médiane issue de M a pour longueur la moitié de celle du côté $[RN]$.

Donc d'après la réciproque du théorème de la médiane (***si dans un triangle une médiane a pour longueur la moitié de celle du côté opposé au sommet dont elle est issue, alors ce triangle est rectangle***) :

le triangle MNR est rectangle en M.

## Exercice D




. Le point E appartient au cercle de diamètre $[AB]$, donc d'après la réciproque du théorème de la médiane, le triangle ABE est rectangle en E.

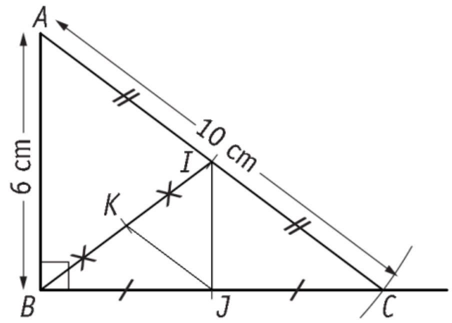
Donc la droite $(AE)$ est perpendiculaire à la droite $(BE)$, c'est-à-dire à la droite $(d)$.

. Le point F appartient au cercle de diamètre $[BC]$, donc d'après la réciproque du théorème de la médiane, le triangle BFC est rectangle en F.
Donc la droite $(FC)$ est perpendiculaire à la droite $(BF)$, c'est-à-dire à la droite $(d)$.

. Donc les droites $(AE)$ et $(FC)$ sont perpendiculaires à la même droite $(d)$.
Donc d'après la propriété, les droites $(AE)$ et $(FC)$ sont parallèles.

## Exercice E

ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AC = 10\,\text{cm}$ et $AB = 6\,\text{cm}$.




**1)** Le triangle ABC est rectangle en B.

Donc d'après le théorème de la médiane, la médiane issue de l'angle droit, c'est-à-dire le segment $[BI]$, a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse $[AC]$.

Donc $BI = \dfrac{AC}{2}$

$BI = \dfrac{10}{2}$

$\boxed{BI = 5\,\text{cm}}$

**2)** Dans le triangle ABC, I est le milieu du segment $[AC]$ et J est le milieu du segment $[BC]$, donc selon la $2^{\text{ème}}$ propriété du théorème des milieux :

$IJ = \dfrac{AB}{2}$

$IJ = \dfrac{6}{2}$

$\boxed{IJ = 3\,\text{cm}}$

**3)** a) . Dans le triangle ABC, I est le milieu du segment $[AC]$ et J est le milieu du segment $[BC]$, donc d'après la $1^{\text{ère}}$ propriété du théorème des milieux : la droite $(IJ)$ est parallèle à la droite $(AB)$.

. Or ABC est un triangle rectangle en B, donc la droite $(AB)$ est perpendiculaire à la droite $(BC)$.

. On en déduit que la droite $(IJ)$ est perpendiculaire à la droite $(BC)$.

b) Les droites $(IJ)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires.
Donc le triangle BIJ est rectangle en J.

Donc d'après le théorème de la médiane,
la médiane issue de l'angle droit, c'est-à-dire le segment $[KJ]$, a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse $[BI]$.

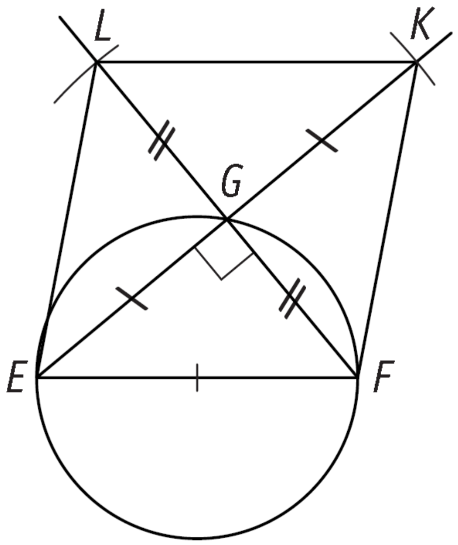
Donc $KJ = \dfrac{BI}{2}$

$KJ = \dfrac{5}{2}$

$\boxed{KJ = 2{,}5\,\text{cm}}$

## Exercice F

**1)** Figure :




Le point G appartient au cercle de diamètre [EF], donc d'après la réciproque du théorème de la médiane, le triangle EFG est rectangle en G.

**2)** Voir figure.

**3)** Le point K est le symétrique du point E par rapport au point G, donc G est le milieu du segment [EK].

Le point L est le symétrique du point F par rapport au point G, donc G est le milieu du segment [FL].

Donc les diagonales [EK] et [FL] du quadrilatère EFKL se coupent en leur milieu, donc EFKL est un parallélogramme.

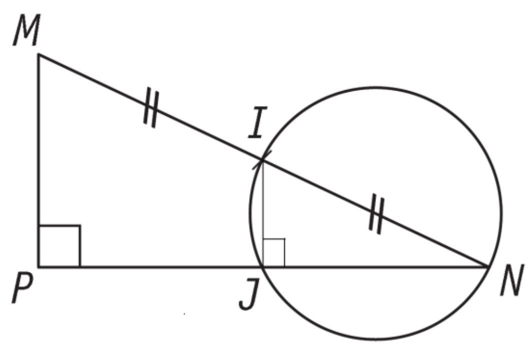
De plus, on a vu que le triangle EFG est rectangle en G, c'est-à-dire : les droites (EK) et (FL) sont perpendiculaires.

Donc les diagonales [EK] et [FL] du quadrilatère EFKL se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires ; donc :

$\boxed{\text{EFKL est un losange.}}$

## Exercice G

Figure :




. Le triangle MNP est rectangle en P, c'est-à-dire : la droite (MP) est perpendiculaire à la droite (PN).

. D'autre part, le point J appartient au cercle de diamètre [IN], donc d'après la réciproque du théorème de la médiane, le triangle INJ est rectangle en J, c'est-à-dire : la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (PN).

. Donc les droites (IJ) et (MP) sont perpendiculaires à la même droite (PN), donc les droites (IJ) et (MP) sont parallèles.

. Dans le triangle MNP, I est le milieu du segment [MN], J un point du segment [PN] et la droite (IJ) est parallèle au troisième côté [MP], donc d'après la $3^{\text{ème}}$ propriété du théorème des milieux : le point J est le milieu du segment [PN].